Aplicações: Funções marginais

Em Administração e Economia, dada uma função $f(x)$, costuma-se utilizar o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em $f(x)$ por uma pequena variação de x. ***Chama-se função marginal de $f(x)$ à função derivada de $f(x)$***. Assim, a função custo marginal é a derivada da função custo, a função receita marginal é a derivada da função receita, e assim por diante. Nesta seção veremos algumas funções marginais.

- ## Função custo marginal

Suponha que $C(x)$ seja o custo total de produção de x unidades de certo produto, com $x \geq 0$ e $C(x) \geq 0$. A função C é chamada de **função custo total** e temos a seguinte definição.

Definição. *Se $C(x)$ é o custo total de produção de x unidades de um produto, então o **custo marginal** quando $x = x_0$, é dado por $C'(x_0)$, caso exista. A função $C'(x)$ é chamada **função custo marginal**.*

Assim, pela seção anterior,

$$C'(x_0) \cong \Delta C = C(x_0 + 1) - C(x_0).$$

Portanto, o custo marginal é aproximadamente igual à variação do custo, decorrente da produção de uma unidade adicional, a partir de x_0 unidades.

Na definição acima, $C'(x_0)$ pode ser interpretada como a **taxa de variação** do custo total quando $x = x_0$ unidades são produzidas.

Exemplo 5.19. *Suponhamos que $C(x)$ seja o custo total de fabricação de x pares de calçados da marca WW dado pela equação $C(x) = 110 + 4x + 0,02x^2$. Determinar o custo marginal quando $x = 50$.*

Resolução: Vamos calcular a derivada da função $C(x)=110+4x+0,02x^2$, ou seja, $C'(x)=4+0,04x$ e $C'(50)=4+0,04\cdot 50=6$. Assim sendo, a taxa de variação do custo total, quando 50 pares de calçados da marca WW são fabricados, é R$6,00 por par fabricado.

O custo de fabricação do qüinquagésimo primeiro par de calçado é

$$C'(50)\cong \Delta C=C(51)-C(50)$$

e

$$\begin{aligned}C(51)-C(50)&=110+4\cdot 51+0,02\cdot(51)^2-\left(110+4\cdot 50+0,02\cdot(50)^2\right)\\&=366,02-360=6,02\end{aligned}$$

Assim,

$$C'(50)\cong \Delta C=C(51)-C(50)=6{,}02.$$

Logo, $C'(50)$ é o custo aproximado da produção do qüinquagésimo primeiro par de calçado da marca WW.

Portanto, o custo marginal quando $x=50$ é $C'(50)=6$.

Exemplo 5.20. *Consideremos a função custo* $C(x)=0,02x^3-0,4x^2+400x+200$, *determinar o custo marginal para* $x=20$.

Resolução: Inicialmente, vamos calcular a derivada da função

$$C(x)=0,02x^3-0,4x^2+400x+200,$$

ou seja,

$$C'(x)=0,06x^2-0,8x+400$$

e

$$C'(20)=0,06\cdot(20)^2-0,8\cdot 20+400=408.$$

Como $C'(20)\cong \Delta C=C(21)-C(20)$, vem

$$\begin{aligned}C'(20)&\cong\left(0,02\cdot(21)^3-0,4\cdot(21)^2+400\cdot 21+200\right)\\&\quad-\left(0,02\cdot(20)^3-0,4\cdot(20)^2+400\cdot 20+200\right)\\&\cong 8.608,82-8.200=408,82.\end{aligned}$$

Logo, $C'(20)$ é o custo aproximado da produção do vigésimo primeiro item.

Portanto, o custo marginal quando $x=20$ é $C'(20)=408$.

- **Função receita marginal**

Suponha que $R(x)$ seja a receita total obtida pela venda de x unidades de um produto e temos a seguinte definição.

Definição. *Se $R(x)$ é a receita obtida quando x unidades de um produto são demandadas, então a **receita marginal**, quando $x = x_0$, é dado por $R'(x_0)$, caso exista. A função $R'(x)$ é chamada **função receita marginal**. $R'(x_0)$ pode ser positiva, negativa ou nula, e pode ser interpretada como a taxa de variação da receita total quanto $x = x_0$ unidades são demandadas.*

Assim, pela seção anterior,

$$R'(x_0) \cong \Delta R = R(x_0 + 1) - R(x_0).$$

Portanto, a receita marginal é aproximadamente igual à variação da receita decorrente da venda de uma unidade adicional, a partir de x_0 unidades.

Exemplo 5.21. *Suponha de $R(x)$ seja a receita total recebida na venda de x cadeiras da loja BBC, e $R(x) = -4x^2 + 2000x$. Calcular a receita marginal para $x = 40$.*

Resolução: Inicialmente, vamos calcular a derivada da função $R(x) = -4x^2 + 2000x$, ou seja,

$$R'(x) = -8x + 2000 \text{ e } R'(40) = -8 \cdot 40 + 2000 = 1.680.$$

Como,

$$\begin{aligned} R'(40) &\cong R(41) - R(40) \\ &\cong -4 \cdot (41)^2 + 2000 \cdot 41 - \left(-4 \cdot (40)^2 + 2000 \cdot 40\right) \\ &\cong 75.276 - 73.600 = 1.676. \end{aligned}$$

Logo, $R'(40)$ é a receita efetiva da venda da quadragésima primeira carteira.

Portanto, a receita marginal quando $x = 40$ é $R'(40) = 1.680$.

Exemplo 5.22. *Consideremos a função receita total da venda de x estantes dada por $R(x) = 500x - \dfrac{x^2}{2}$. Calcular a receita marginal para $x = 50$.*

Resolução: Calculando a derivada da função $R(x) = 500x - \dfrac{x^2}{2}$, temos

$R'(x) = 500 - x$ e $R'(50) = 500 - 50 = 450$.

Como

$$\begin{aligned} R'(50) &\cong R(51) - R(50) = 500 \cdot 51 - \frac{(51)^2}{2} - \left(500.50 - \frac{(50)^2}{2}\right) \\ &\cong 24.199,50 - 23.750 = 449,50. \end{aligned}$$

Logo, $R'(50)$ é a receita efetiva da venda da qüinquagésima estante.
Portanto, a receita marginal quando $x = 50$ é $R'(50) = 450$.

- ## Função produtividade marginal

Consideremos uma função de produção P que dependa da quantidade x de um fator de produção variável. Chama-se **função produtividade marginal** do fator à derivada da função P em relação a x.

Exemplo 5.23. *A quantidade P (em toneladas) produzida por mês de certo produto e x o trabalho mensal envolvido (medido em homens-hora) é dada pela função produção $P(x) = 1016\sqrt{x}$. Determinar a produtividade marginal quando $x = 64$.*

Resolução: Vamos calcular a derivada da função $P(x) = 1016\sqrt{x}$ em relação a x que é a função produtividade marginal do fator trabalho mensal, logo

$$P(x) = 1016\sqrt{x} = 1016\, x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P'(x) = 1016\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 508x^{-\frac{1}{2}} = 508\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{508}{\sqrt{x}},$$

ou seja,

$$P'(x) = \frac{508}{\sqrt{x}}.$$

Calculando a produtividade marginal quando $x = 64$, temos

$$P'(64) = \frac{508}{\sqrt{64}} = \frac{508}{8} = 63,5.$$

Assim, se o número de homens-hora passar de 64 para 65, o aumento na produção mensal será, aproximadamente, 63,5 toneladas.

Portanto, a produtividade marginal da função produção $P(x) = 1.016 \cdot \sqrt{x}$ quando $x = 64$ é 63,5 toneladas.

Exemplo 5.24. *Considere a função produção $P(H) = 500 \cdot \sqrt{H} - 6H$, onde P é a produção mensal (em toneladas), e H, o número de homens-hora empregados. Calcular:*
a) *função produtividade marginal, $P'(H)$;*
b) $P'(100)$.

Resolução: a) Vamos calcular a derivada da função P em relação a H, logo

$$P(H) = 500 \cdot \sqrt{H} - 6H = 500 \cdot H^{\frac{1}{2}} - 6H$$

$$\Rightarrow P'(H) = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot H^{\frac{1}{2}-1} - 6 = 250 \cdot H^{-\frac{1}{2}} - 6$$

$$= 250 \cdot \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} - 6 = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6,$$

ou seja,

$$P'(H) = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6.$$

Portanto, a função produtividade marginal é

$$P'(H) = \frac{250}{\sqrt{H}} - 6.$$

b) Agora, vamos calcular $P'(100)$, isto é,

$$P'(100) = \frac{250}{\sqrt{100}} - 6 = \frac{250}{10} - 6 = 25 - 6 = 19.$$

Portanto, $P'(100) = 19$.